2014 年度 修士論文要旨

平面曲線の中心アフィン幾何

関西学院大学大学院 理工学研究科
数理科学専攻 黒瀬研究室 植田成亮

2 次正則実行列 A を用いて, $\varphi(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ $(\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2)$ で定義される $\mathbb{R}^2$ の変換 φ を中心アフィン変換と呼び, 中心アフィン変換のもとで平面図形がもつ不変な性質や量を調べる幾何を中心アフィン幾何という. 平面の図形として曲線を対象にしたとき, そのユークリッド幾何的な研究に比べて中心アフィン幾何的な研究はあまりすすめられてはおらず, 参考文献 [1], [2] の付録でごく手短に述べられている基本的な事項を除いて, 知られていることはあまりないようである. そこで, 本研究では, まず平面曲線の中心アフィン幾何を基礎から系統立てて展開することから始め, 次いで上記文献では扱われていない事項の一つとして, 曲率の正負と曲線の局所的な概形との関係を調べた. さらに, 曲率の符号が変化する場合として, $\sin s$ を曲率にもつ曲線の概形を考察した.

1 非退化な平面曲線の符号と中心アフィン曲率

曲線 $\boldsymbol{p} : I \to \mathbb{R}^2$ が, **非退化**であるとは,

$$\det(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{p}'(t)) \neq 0, \quad \det(\boldsymbol{p}'(t), \boldsymbol{p}''(t)) \neq 0 \quad (t \in I)$$

が成り立つこととする. このとき, 適当なパラメータ変換 $t = t(s)$ $(s \in \tilde{I})$ により, $\tilde{\boldsymbol{p}}(s) = \boldsymbol{p}(t(s))$ $(s \in \tilde{I})$ が

$$\tilde{\boldsymbol{p}}''(s) = \pm\tilde{\boldsymbol{p}}(s) + (\tilde{\boldsymbol{p}}'(s) \text{ 方向の成分})$$

を満たすようにできる. このパラメータ s を**中心アフィンパラメータ**と呼び, 中心アフィンパラメータで表された曲線を **中心アフィン曲線**と呼ぶ.

中心アフィン曲線 $\boldsymbol{p} : I \to \mathbb{R}^2$ に対して,

$$\boldsymbol{p}''(s) = -\varepsilon\boldsymbol{p}(s) + \kappa(s)\boldsymbol{p}'(s) \quad (\varepsilon = +1 \text{ または } -1,\ \kappa \text{ は } I \text{ 上の関数})$$

とおくとき, ε を $\boldsymbol{p}$ の**符号**と呼び, κ を $\boldsymbol{p}$ の**中心アフィン曲率**と呼ぶ. これらは, 中心アフィン変換で不変な量であり, 中心アフィン曲線を中心アフィン変換を除いて一意に決定すること (中心アフィン平面曲線論の基本定理) が示される. また, 中心アフィン曲率が一定の中心アフィン曲線は全て具体的に求めることができ, 特に中心アフィン曲率が恒等的に 0 となるのは, 原点を中心とする楕円 (符号が $+1$ のとき), もしくは双曲線 (符号が -1 のとき) である.

2 中心アフィン曲率の正負と曲線の概形

$\boldsymbol{p} : I \to \mathbb{R}^2$ を符号が $+1$ の中心アフィン曲線とする. $s_0 \in I$ に対して, 楕円 $E(s_0) = \{\cos\theta \cdot \boldsymbol{p}(s_0) + \sin\theta \cdot \boldsymbol{p}'(s_0); \theta \in \mathbb{R}\}$ を曲線 $\boldsymbol{p}$ の s_0 における**接触楕円**と呼ぶ. 中心アフィン曲率が正の区間において, 曲線の 2 点における接触楕円たちの関係を表したのが, 次の定理である.

定理 1　$\boldsymbol{p} : I \to \mathbb{R}^2$ を符号が $+1$, 中心アフィン曲率が κ である中心アフィン曲線とする. $s_0, s_1 \in I$ に対し, $s_0 \leq s \leq s_1$ で $\kappa(s) > 0$ が成り立っているならば, $E(s_1)$ は $E(s_0)$ の外側にある.

この定理から, 曲線と接触楕円の位置関係に関する次の結果が得られる.

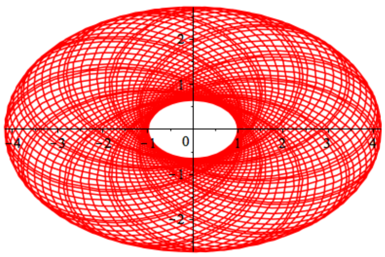
系 2　$\boldsymbol{p} : I \to \mathbb{R}^2$ 及び κ は上の定理の通りとする. $s_0 \in I$ において $\kappa(s_0) > 0$ のとき, 点 $\boldsymbol{p}(s)$ は s_0 の前後で接触楕円 $E(s_0)$ の内側から外側に出ていく.

符号が -1 の中心アフィン曲線に対しては, 曲線の各点で接触楕円の代わりに接触双曲線が定義され, 定理 1 に対応する結果が示される. 特に系 2 に対応するものとして, 次の定理が成り立つ.

定理 3　$\boldsymbol{p} : I \to \mathbb{R}^2$ を符号が -1, 中心アフィン曲率が κ である中心アフィン曲線とする. $s_0 \in I$ において $\kappa(s_0) > 0$ のとき, 点 $\boldsymbol{p}(s)$ は s_0 の前後で接触双曲線 $H(s_0)$ の外側から内側に入っていく.

3　符号が $+1$, 中心アフィン曲率が $\sin s$ の中心アフィン曲線

定理 4　$\boldsymbol{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を符号が $+1$, 中心アフィン曲率が $\sin s$ である中心アフィン曲線で $\boldsymbol{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たすものとする. また, $\boldsymbol{p}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ として, $\rho = \left| \dfrac{x'(2\pi)}{y(2\pi)} \right|^{\frac{1}{4}}$ とする. このとき, ある正定数 $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$ が存在して, 曲線 $\boldsymbol{p}$ は楕円 $x^2 + \rho^4 y^2 = 1$ と楕円 $x^2 + \rho^4 y^2 = (R\rho)^2$ で挟まれた範囲にある.



符号が $+1$, 中心アフィン曲率が $\sin s$ の中心アフィン曲線

参考文献

[1] 古畑仁, 中心アフィン幾何学にあらわれる曲面たち, 数理解析研究所講究録 1623 「部分多様体の微分幾何学およびその周辺領域の研究」, 1–11, 2009 年 1 月.

[2] 古畑仁, 曲面—幾何学基礎講義, 数学書房 (テキスト理系の数学 8), 2013 年 9 月.